

**PEMBAHASAN SOAL UJIAN PAI A20 (PROBABILITAS DAN STATISTIKA) – NO. 6 –  
PERIODE MEI 2017**

Oleh: Abinaila Savina Taim – 1 Agustus 2018

---

**SOAL**

6. Pada bilangan acak, jarak antara dua distribusi didefinisikan sebagai maksimum,

$$\max_{-\infty < x_1 < x_2 < \infty} |F(x_1) - F(x_2)|$$

Dengan  $F(x)$  adalah fungsi distribusi kumulatifnya. Cari jarak antara dua distribusi berikut:

(i) Seragam pada interval  $[0, 1]$

(ii) Pdf:  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ,  $0 < x < \infty$

A) 0

B)  $\frac{1}{4}$

C)  $\frac{1}{2}$

D)  $\frac{3}{4}$

E) 1

**PEMBAHASAN**

(i)  $f(x) = \frac{1}{1-0} = 1, 0 < x < 1$

$$F_1(x) = \begin{cases} \int_0^x 1 \, dy = x, & 0 < x < 1 \\ \int_1^x 0 \, dy = 1, & 1 < x < \infty \end{cases}$$

(ii)  $f(x) = (x + 1)^{-2}, -\infty < x < \infty$

$$F_2(x) = \int_0^x (y + 1)^{-2} \, dy = \frac{x}{x + 1}, 0 < x < \infty$$

•  $\max_{-\infty < x < \infty} |F_1(x) - F_2(x)|,$

Untuk  $x < 0,$

$$\begin{aligned} \cdot \max_{x < 0} |F_1(x) - F_2(x)| &= \max_{x < 0} \left| 0 - \frac{x}{x+1} \right| \\ &= \max_{x < 0} \left| \frac{x}{x+1} \right| \end{aligned}$$

$$\cdot g(x) = \frac{x}{x+1}, x < 0$$

$$\cdot g'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x+1} \right) = 0 \quad \rightarrow \text{Mencari nilai maksimum } x$$

$$0 = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \rightarrow \text{Nilai maksimum } x \text{ pada } x < 0 \text{ tidak ditemukan}$$

Untuk  $0 < x < 1,$

$$\begin{aligned} \cdot \max_{0 < x < 1} |F_1(x) - F_2(x)| &= \max_{0 < x < 1} \left| x - \frac{x}{x+1} \right| \\ &= \max_{0 < x < 1} \left| \frac{x^2}{x+1} \right| \end{aligned}$$

$$\cdot g(x) = \frac{x^2}{x+1}, 0 < x < 1$$

$$\cdot g'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{x+1} \right) = 0 \quad \rightarrow \text{Mencari nilai maksimum } x$$

$$0 = x^2 + 2x$$

$$x = 0 \text{ atau } x = -2$$

$$\cdot g(0) = 0 \quad \rightarrow \text{Nilai maksimum } x \text{ pada } 0 < x < 1$$

Untuk  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \cdot \max_{x>1} |F_1(x) - F_2(x)| &= \max_{x>1} \left| 1 - \frac{x}{x+1} \right| \\ &= \max_{x>1} \left| \frac{1}{x+1} \right| \end{aligned}$$

$$\cdot g(x) = \frac{1}{x+1}, x > 1$$

$$\cdot g'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x+1} \right) = 0 \quad \rightarrow \text{Mencari nilai maksimum } x$$

$$0 = -(x+1)^{-2} \quad \rightarrow \text{Merupakan fungsi turun, maka nilai maksimum pada batas bawah yaitu } (x=1)$$

$$\cdot g(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \text{Nilai maksimum } x \text{ pada } x > 1$$

- $\max_{-\infty < x < \infty} |F_1(x) - F_2(x)|$  berada pada titik  $x = 1$  dengan jarak sebesar  $\frac{1}{2}$

- Jawaban pada pilihan : C.  $\frac{1}{2}$